Los conjuntos definidos por ecuaciones **lineales y homogéneas** en las componentes ($x + 3y + 2z = 0$, $a = 3c$) siempre son subespacios. Esa es una condición suficiente, no necesaria. Una constante distinta de cero ($p(0) = 3$) deja fuera al vector cero y basta para descartar. Con un valor absoluto, un producto de componentes o una potencia, el conjunto *suele* fallar, pero no siempre: $\{(x, y) \mid x^2 = 0\}$ es el eje y y sí es subespacio. En esos casos se simplifica la condición o se comprueban el cero y las dos cerraduras, con un contraejemplo concreto si alguna falla.

Combinación lineal y espacio generado. $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$ para algunos escalares. El conjunto de todas las combinaciones lineales es el *espacio generado*, $\text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, y siempre es un subespacio.

Dependencia lineal. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ es *linealmente independiente* si la única solución de $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$ es $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$; si hay otra, es *dependiente*. Un conjunto que contiene al vector cero siempre es dependiente. n vectores de $\mathbb{R}^n$ son independientes si y solo si el determinante de la matriz que forman es distinto de cero.

Base y dimensión. Una *base* de V es un conjunto generador linealmente independiente. Todas las bases tienen el mismo número de vectores: la *dimensión* de V. $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim P_n = n + 1$, $\dim M_{m\times n} = mn$. En un espacio de dimensión n, n vectores independientes ya son base.

Isomorfismo. Al fijar una base, cada vector se identifica con su vector de coordenadas. Así, P_2 se comporta como $\mathbb{R}^3$ ($ax^2 + bx + c \leftrightarrow (a, b, c)$) y $M_{2\times 2}$ como $\mathbb{R}^4$: se dice que son *isomorfos*. En la práctica, un problema con polinomios o matrices se resuelve con sus coeficientes como vectores de $\mathbb{R}^n$.

Coordenadas. Si $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ es una base ordenada y $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$, el *vector de coordenadas* de $\vec{v}$ en B es $(\vec{v})_B = (c_1, \dots, c_n)^T$. Es único.

Matriz de transición. La matriz de transición de la base A a la base B, M_B^A, tiene por columnas los vectores de coordenadas de los vectores de A en la base B. Con ella:

$$(\vec{v})_B = M_B^A\,(\vec{v})_A, \qquad \left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B, \qquad M_C^A = M_C^B\,M_B^A.$$

Si A es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, M_A^B tiene por columnas los vectores de B tal cual.

Espacio renglón, espacio columna y rango. Para una matriz N de $m \times n$, el *espacio renglón* es el generado por sus renglones (subespacio de $\mathbb{R}^n$) y el *espacio columna*, el generado por sus columnas (subespacio de $\mathbb{R}^m$). Los dos tienen la misma dimensión: el *rango* de N. Las operaciones elementales por renglones no cambian el espacio renglón, y los renglones no nulos de la forma escalonada son una base de él.

Funciones. Las funciones reales de variable real forman un espacio vectorial (de dimensión infinita); $\{f_1, \dots, f_n\}$ genera un subespacio de dimensión finita. Para decidir la dependencia, se busca una identidad entre las funciones o se evalúa la ecuación $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$ en varios valores de x.

2.2 Cómo reconocer el problema

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra Lineal

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

7. **Detenerse en el primer axioma que falla** cuando el enunciado pide «todos los axiomas que no se cumplen».

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Grupo: cerradura, asociatividad, idéntico $a * e = e * a = a$, inversos $a * a' = a' * a = e$ · abeliano: además $a * b = b * a$
- Tabla: idéntico = renglón y columna que repiten los encabezados · conmutativa = simétrica · grupo: sin repetidos por renglón ni columna
- Campo $(K, \oplus, \odot)$: $(K, \oplus)$ grupo abeliano, $(K \setminus \{0\}, \odot)$ grupo abeliano, $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- En $\{0, 1, 2\}$ módulo 3: $-1 = 2$, $-2 = 1$, $2^{-1} = 2$
- $x * y = x + y + xy$: $x * y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, $e = 0$, $x' = -\frac{x}{1+x}$
- $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe la lista de axiomas que se piden (grupo o grupo abeliano) antes de empezar.
2. Para cada axioma, una línea con la igualdad planteada y «Se cumple» o «No se cumple» con su contraejemplo.
3. El idéntico y los inversos escritos explícitamente, aunque no se pidan.
4. En una tabla, la tabla completa al final y la comprobación de simetría.
5. La conclusión en una frase: «$(A, *)$ es (no es) un grupo abeliano porque…».

Si el enunciado no da la asociatividad y no se sabe probar, se dice que queda pendiente (no se supone) y se continúa con los demás axiomas: la conclusión queda condicionada, pero el resto vale la mayor parte de los puntos.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra Lineal** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o tras varias semanas sin estudiar la materia. Sirve para los **dos planes de estudio** en que se imparte la asignatura: el Plan 2010 y el Plan 2016. La Unidad 0 explica cómo saber cuál es el tuyo y qué partes del libro te tocan.

Sigue el orden de los temas del programa:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen, qué plan es el tuyo y lo que se usa de Álgebra.
1. Parte A: Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010). Parte B: Grupos y campos (solo Plan 2016).
2. Espacios vectoriales.
3. Transformaciones lineales. Parte A: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa. Parte B: valores y vectores propios; diagonalización.
4. Espacios con producto interno.
5. Operadores lineales en espacios con producto interno.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa). El alumno analizará los conceptos básicos del álgebra lineal, ejemplificándolos mediante sistemas ya conocidos, haciendo énfasis en el carácter general de los resultados, a efecto de que adquiera elementos que le permitan fundamentar diversos métodos empleados en la resolución de problemas de ingeniería. (El programa del Plan 2016 dice «sistemas algebraicos ya conocidos»; el resto es igual.)

De dónde salen los ejercicios.

- Del **Plan 2010**: los 8 exámenes finales de Álgebra Lineal que se conservan, de 2010-2 a 2015-1.
- Del **Plan 2016**: 13 finales, 16 extraordinarios y 5 parciales, de 2017-1 a 2026-1.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Las resoluciones son propias y todas se verificaron con un sistema de álgebra computacional. Solo uno de esos exámenes tiene una resolución publicada; las diferencias con ella, y las erratas de los enunciados, se anotan en el Apéndice C (Fe de erratas).

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: a qué plan corresponde (si es de uno solo), cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos.**

5. **Resultado:** $(M, \circ)$ **es un grupo abeliano** con idéntico h. (Las funciones se consideran donde están definidas, $x \neq 0, 1$.)

1B.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ con la operación # definida por la tabla

#	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Considerando que se cumple la asociatividad, determine si $(A, \#)$ es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico 1; inversos $1' = 1$, $2' = 3$, $3' = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 1er final 2026-1, problema 1.

Sea $K = \{x, y, z, w\}$ con la operación Δ, que es asociativa, definida por

Δ	x	y	z	w
x	w	z	x	y
y	z	w	y	x
z	x	y	z	w
w	y	x	w	z

Determine si (K, Δ) es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico z; inversos $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$, $w' = w$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 1.

En $A = \{\mu, a, b\}$, con μ idéntico de Δ, se dan $\mu \,\Delta\, \mu = \mu$, $a \,\Delta\, a = b$ y $b \,\Delta\, b = a$. a) Complete la tabla para que (A, Δ) sea grupo abeliano. b) Obtenga los inversos.

Resultado: a) $a \,\Delta\, b = b \,\Delta\, a = \mu$ y el renglón y la columna de μ repiten los encabezados; b) $\mu' = \mu$, $a' = b$, $b' = a$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2021-1, problema 1.

En $A = \{i, j, k\}$ se definen las operaciones

Unidad 0 · Antes de empezar: qué plan es el tuyo y qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 30 minutos para las secciones 0.1 a 0.5. El repaso de Álgebra (0.6) se usa como consulta.
- **Para qué:** saber qué unidades te tocan y dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

La asignatura se imparte con dos programas. Tu historia académica dice cuál es el tuyo; busca el número de Álgebra Lineal: **0062** es el Plan 2010 y **1220** es el Plan 2016. Si no la tienes a mano: en general, quien ingresó antes de que entrara en vigor el Plan 2016 sigue en el Plan 2010.

	Plan 2010 (clave 0062)	Plan 2016 (clave 1220)
Estudia	2, 3A, 3B, 4 y 5; la 1A solo se lee	1B, 2, 3A, 3B, 4 y 5
No estudies	1B (en tu plan es de Álgebra)	1A
Párrafos con rótulo SOLO PLAN 2010	sí	sáltalos
El examen trae (6 problemas, 2 horas)	1 o 2 de espacios vectoriales, 2 de transformaciones (uno de valores propios), 1 o 2 de producto interno y 1 de operadores	lo mismo y, casi siempre, un problema 1 de grupos y campos (de 10 a 16 puntos)

Las diferencias entre los dos programas son pocas. El Plan 2016 cambió la Unidad 1 (de la historia del álgebra lineal a grupos y campos) y quitó el criterio del wronskiano y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Todo lo demás es igual: los temas 2 a 5 coinciden subtema por subtema. Por eso, desde 2016 solo se publican exámenes del Plan 2016, y esos exámenes son también la mejor referencia reciente para el Plan 2010.

Si tu clave no aparece en la programación de exámenes extraordinarios, pide que se dé de alta antes del periodo de aclaraciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 8 finales del Plan 2010 (2010-2 a 2015-1) y los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016 (2017-1 a 2026-1):

- **Duración y problemas:** 6 problemas en 2 horas. Los finales de 2010-2 tenían 7 problemas en 2.5 horas; el 1er final 2025-1 y el 2º extraordinario 2023-1 traen 5.

4. **Resultado:**

δ	3	2	1	0
3	3	2	1	0
2	2	3	0	1
1	1	0	3	2
0	0	1	2	3

   Cada elemento es su propio inverso. Es la única forma de completar la tabla como grupo abeliano.

Ejercicio 1B.5.4 · Sistema de ecuaciones en el campo $\{0, 1, 2\}$

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 1.

Sea el campo formado por $\mathbb{F} = \{0, 1, 2\}$ con la suma $\oplus$ y la multiplicación $\odot$ definidas por

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

El idéntico de $\oplus$ es 0 y el de $\odot$ es 1. Encuentre $x, y \in \mathbb{F}$ que satisfacen

$$(2 \odot x) \oplus (1 \odot y) = 1, \qquad x \oplus y = 0.$$

Resolución.

1. Inversos aditivos: $-0 = 0$, $-1 = 2$, $-2 = 1$. Inversos multiplicativos: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$ (porque $2 \odot 2 = 1$).
2. De la segunda ecuación, $y = -x$. Como $1 \odot y = y$, la primera queda $(2 \odot x) \oplus (-x) = 1$.
3. Por distributividad, $(2 \odot x) \oplus (-x) = (2 \odot x) \oplus (2 \odot x) = (2 \oplus 2) \odot x = 1 \odot x = x$, porque $-x = 2 \odot x$ (el inverso aditivo de 1 es 2). Entonces $x = 1$.
4. $y = -1 = 2$.
5. Comprobación: $(2 \odot 1) \oplus (1 \odot 2) = 2 \oplus 2 = 1$ y $1 \oplus 2 = 0$.
6. **Resultado:** $x = 1$, $y = 2$. Coincide con la resolución publicada.

Ejercicio 1B.5.5 · Pares con producto componente a componente

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo D, problema 1.

Sea el sistema $(C, *)$, donde $C = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$. Determine si $(C, *)$ es un grupo abeliano, considerando que se cumple la asociatividad.

Resolución.

1. **Cerradura.** $ac, bd \in \mathbb{R}$. Se cumple.
2. **Asociatividad.** Dada por el enunciado.
3. **Idéntico.** $(a, b) * (e_1, e_2) = (ae_1, be_2) = (a, b)$ para todo (a, b) da $e = (1, 1)$. Se cumple.
4. **Inversos.** $(a, b) * (c, d) = (1, 1)$ exige $ac = 1$ y $bd = 1$. Para $(0, 1)$: $(0, 1) * (c, d) = (0, d) \neq (1, 1)$ para cualquier (c, d). No se cumple.

0.4 Orden de estudio y rutas

El libro sigue el orden del programa, pero conviene estudiarlo en otro orden. La Unidad 3B va primero: es el subtema más frecuente y la Unidad 5 y las cónicas lo reutilizan.

Ruta de 5 semanas (unas 10 horas por semana):

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	0 (repaso de Álgebra) y 3B	0 (repaso de Álgebra), 1B y 3B
2	2	2
3	3A	3A
4	4	4
5	5 y un examen completo del Apéndice B (Plan 2010)	5 (con formas cuádricas) y un examen completo del Apéndice B (Plan 2016)

Ruta de 2 semanas:

- **Plan 2010.** Primera semana: 3B, 2 y 3A. Segunda semana: 4, 5 y un examen completo.
- **Plan 2016.** Primera semana: 1B, 3B, 2 y 3A. Segunda semana: 4, 5 y un examen completo. La 1B es corta y mecánica, y casi siempre es el problema 1.

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden: los efectos geométricos, los mínimos cuadrados, las formas cuádricas (solo si tu plan es el 2010: en el Plan 2016 salen más) y la demostración de que un conjunto es ortogonal. No conviene recortar la matriz de transición, los valores propios, la proyección ni el adjunto.

0.5 Notación de este cuaderno

- **Vectores con flecha:** $\vec{u}$, $\vec{v}$. En los exámenes los vectores llevan barra ($\bar{u}$); aquí se usa la flecha para no confundirlos con el **conjugado**, que es lo único que lleva barra: $\overline{z}$, $\overline{A}$.
- **Vector de coordenadas** de $\vec{v}$ en la base B: $(\vec{v})_B$, escrito como columna.
- **Matriz de transición** de la base A a la base B: M_B^A, de modo que $(\vec{v})_B = M_B^A (\vec{v})_A$.
- **Matriz asociada** a $T : V \to W$ respecto a las bases A de V y B de W: $M_B^A(T)$. Núcleo $N(T)$, recorrido $T(V)$.
- **Producto interno:** $(\vec{u} \mid \vec{v})$. En los espacios complejos es lineal en el primer argumento y conjugado en el segundo: $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \sum u_i \overline{v_i}$, como en los exámenes.
- gen$\{\dots\}$ es el espacio generado; rango A, el rango; tr A, la traza.

0.6 Lo que se usa de Álgebra

Álgebra Lineal da por sabido casi todo el curso de Álgebra. Esta sección repasa solo lo que se usa, con un procedimiento y un ejemplo corto por punto. Para lo demás, véase el cuaderno *Curso de Emergencia, Álgebra*; sus unidades 3 a 6 tienen el mismo número en los dos planes.

3. En un campo pequeño, comprueba la solución en las dos ecuaciones; también se puede probar con todas las parejas posibles (en $\{0,1,2\}$ son 9).

1B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo B, problema 1.

Sean el conjunto $C=\{0,1,2,3\}$ y la operación binaria $\bullet$ definida por la tabla

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Determine: a) si la operación es conmutativa; b) si existe elemento idéntico; c) si $(C,\bullet)$ es un grupo abeliano (considere que la asociatividad se cumple).

Datos. Conjunto finito con tabla; la asociatividad se da por cierta.

Planteamiento. Leer en la tabla la simetría, el idéntico y los inversos (1B.3.2).

Resolución.

1. a) La tabla es simétrica respecto a la diagonal: $1\bullet 2=3=2\bullet 1$, $1\bullet 3=0=3\bullet 1$, $2\bullet 3=1=3\bullet 2$, y las demás parejas igual. **Es conmutativa.**
2. b) El renglón de 0 es $0,1,2,3$, igual al encabezado, y su columna también. **El idéntico es $e=0$.**
3. c) Cerradura: todas las entradas están en C. Se cumple.
4. Inversos: el 0 aparece en el renglón de 0 bajo la columna 0, en el de 1 bajo la columna 3, en el de 2 bajo la columna 2 y en el de 3 bajo la columna 1. Entonces $0'=0$, $1'=3$, $2'=2$, $3'=1$. Se cumple.
5. Asociatividad: dada por el enunciado. Conmutatividad: inciso a).
6. **Resultado:** $(C,\bullet)$ es un grupo abeliano con idéntico 0. La tabla es la suma de residuos módulo 4.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Matrices de rotación con el producto

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 1.

Determine si el sistema $(M,*)$ es un grupo, donde

$$M=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

y $*$ es la multiplicación usual de matrices. Considere que la asociatividad se cumple.

Resolución. Sea $R(\theta)$ la matriz de M con ángulo θ.

1. **Cerradura.** Con las fórmulas del coseno y el seno de una suma:

$$R(\alpha)R(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{pmatrix}=R(\alpha+\beta).$$

3. Comprueba siempre $AA^{-1}=I$ con un renglón y una columna.

Ejemplo. $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$: $\det A=6-5=1$ y $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$. Comprobación del primer renglón por la primera columna: $3(2)+1(-5)=1$.

0.6.3 Determinantes

1. Desarrolla por el renglón o la columna con más ceros: $\det A=\sum_j a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$.
2. Propiedades útiles: un renglón de ceros, o dos renglones proporcionales, dan $\det=0$; sumar a un renglón un múltiplo de otro no cambia el determinante; el de una matriz triangular es el producto de la diagonal.
3. $\det A\neq 0$ si y solo si A es invertible, si y solo si sus renglones (o columnas) son linealmente independientes.

Ejemplo. $\det\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$: por el tercer renglón, $4\det\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=4(6)=24$.

0.6.4 Raíces de un polinomio de grado 3

1. Las posibles raíces enteras dividen al término independiente.
2. Prueba cada una; cuando una da cero, divide entre $(\lambda-r)$ con división sintética.
3. Resuelve la cuadrática que queda con la fórmula general.

Ejemplo. $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$: las candidatas son $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Con $\lambda=1$: $1-6+11-6=0$. División sintética de los coeficientes $1,-6,11,-6$ entre $\lambda-1$: quedan $1,-5,6$ y residuo 0. Entonces $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

0.6.5 Números complejos

- $z=a+bi$, conjugado $\overline{z}=a-bi$, módulo $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ y $z\overline{z}=|z|^2$.
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$; z es real si y solo si $z=\overline{z}$, e imaginario puro si y solo si $z=-\overline{z}$.
- División: se multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador.

Ejemplo. $z=2+i$, $w=1-i$: $z\overline{w}=(2+i)(1+i)=2+2i+i+i^2=1+3i$ y $|z|^2=4+1=5$.

0.6.6 Conjugada transpuesta y matrices especiales

- A^T: transpuesta; $\overline{A}$: conjugar cada elemento; $A^*=\overline{A}^T$: conjugada transpuesta.
- Reales: simétrica $A^T=A$; antisimétrica $A^T=-A$; ortogonal $A^TA=I$.
- Complejas: hermitiana $A^*=A$; antihermitiana $A^*=-A$; unitaria $A^*A=I$.
- La diagonal de una hermitiana es real; la de una antihermitiana es imaginaria pura.

Ejemplo. $A=\begin{pmatrix}2&1+i\\1-i&3\end{pmatrix}$: $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1-i\\1+i&3\end{pmatrix}$ y $A^*=\overline{A}^T=\begin{pmatrix}2&1+i\\1-i&3\end{pmatrix}=A$. Es hermitiana.

0.7 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y **reparte el tiempo según la puntuación**: unos 18 minutos por problema de 16 a 20 puntos.

columna.

La asociatividad no se ve en la tabla. Los exámenes casi siempre la dan por cierta («considerando que se cumple la asociatividad»); si no, se comprueba con la regla.

Campo. Un sistema $(K, \oplus, \odot)$ con dos operaciones es un *campo* si:

1. $(K, \oplus)$ es un grupo abeliano, con idéntico 0 (el cero del campo);
2. $(K \setminus \{0\}, \odot)$ es un grupo abeliano, con idéntico 1;
3. $\odot$ es distributiva sobre $\oplus$: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Ejemplos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la suma y el producto usuales. $\mathbb{Z}$ no es campo: el 2 no tiene inverso multiplicativo entero. El conjunto $\{0, 1, 2\}$ con la suma y el producto *módulo 3* (se toma el residuo de dividir entre 3) sí es un campo. Los campos importan en Álgebra Lineal porque los escalares de un espacio vectorial se toman de un campo (Unidad 2).

1B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determine si cumple la cerradura», «¿es una operación binaria?»	cerradura con la regla	1B.3.1
una tabla y «¿es grupo abeliano?», «elemento idéntico», «inversos»	leer la tabla	1B.3.2
una regla ($x * y = \ldots$, matrices, funciones) y «¿es grupo?»	axioma por axioma	1B.3.3
«complete la tabla para que sea grupo abeliano»	idéntico, simetría y renglones sin repetir	1B.3.4
«sabiendo que es grupo abeliano, resuelva la ecuación»	despejar con el inverso	1B.3.5
«sea el campo…», tablas de $\oplus$ y $\odot$, ecuaciones	resolver en el campo	1B.3.6

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 Cerradura

1. Toma dos elementos genéricos del conjunto, con la forma que da el enunciado (por ejemplo, (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con entradas enteras).
2. Aplica la regla y revisa que el resultado tenga la misma forma y cumpla las mismas condiciones (entradas enteras, un cero en el mismo lugar, denominador distinto de cero, $x \neq -1$…).
3. Si alguna pareja da un resultado fuera del conjunto, da ese contraejemplo con números: «No se cumple».

1B.3.2 Grupo a partir de una tabla

1. **Cerradura:** todas las entradas están en el conjunto.

Unidad 1 · Parte A · Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno identificará acontecimientos relevantes de la historia del álgebra lineal, y algunas de las aplicaciones del álgebra lineal en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 la Unidad 1 es Grupos y campos (Parte B).
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 8 finales del Plan 2010.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1A.1 Historia breve

- **Hace unos dos mil años**, el texto chino *Los nueve capítulos sobre el arte matemático* resolvía sistemas de ecuaciones lineales acomodando los coeficientes en un arreglo rectangular y eliminando incógnitas: el mismo método que hoy se llama de Gauss.
- **1805–1809.** Legendre y Gauss publican el método de *mínimos cuadrados* para ajustar órbitas a observaciones astronómicas; Gauss sistematiza la eliminación para resolver las ecuaciones que resultan.
- **1843–1844.** Hamilton inventa los cuaterniones y Grassmann publica su teoría de la extensión, donde aparecen por primera vez la combinación lineal, la independencia y la dimensión en general, no solo para el plano y el espacio.
- **1850–1858.** Sylvester introduce la palabra *matriz*; Cayley define el álgebra de matrices (suma, producto, inversa) y estudia lo que hoy se llama el polinomio característico.
- **1888.** Peano da la definición axiomática de *espacio vectorial* que se usa en la Unidad 2: un conjunto con dos operaciones que cumplen una lista de axiomas, sin importar si sus elementos son flechas, polinomios, matrices o funciones.
- **Siglo XX.** Hilbert y sus sucesores llevan el producto interno y la teoría espectral a espacios de funciones; con las computadoras, el álgebra lineal numérica se vuelve la herramienta de cálculo más usada en ingeniería.

1A.2 Aplicaciones en ingeniería

- **Circuitos y estructuras:** las leyes de Kirchhoff o el equilibrio de los nodos de una armadura dan sistemas lineales; su solución es un problema de núcleo y recorrido (Unidades 2 y 3A).
- **Gráficas por computadora:** rotaciones, escalamientos y reflexiones son transformaciones lineales; componerlas es multiplicar sus matrices (Unidad 3A).
- **Vibraciones y estabilidad:** las frecuencias naturales de un sistema mecánico o eléctrico son valores propios (Unidad 3B).
- **Ajuste de datos:** la recta o la parábola que mejor se ajusta a mediciones se obtiene por mínimos cuadrados, que es una proyección ortogonal (Unidad 4).
- **Búsqueda y compresión:** el orden de las páginas en un buscador se obtiene de un vector propio, y la compresión de imágenes usa bases ortogonales y la descomposición

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué plan es el tuyo y qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Introducción al álgebra lineal (solo Plan 2010) 11

Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016) 13

Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición 23

Unidad 3 · Parte A · Transformaciones lineales: núcleo, recorrido, matriz asociada e inversa 35

Unidad 3 · Parte B · Valores y vectores propios; diagonalización 47

Unidad 4 · Espacios con producto interno: norma, ortogonalidad, Gram-Schmidt y proyección 58

Unidad 5 · Operadores lineales en espacios con producto interno: adjunto, tipos de operador y teorema espectral 69

Apéndice A · Formulario 79

Apéndice B · Qué vino en cada examen 81

Apéndice C · Fe de erratas 87

Apéndice D · Fuentes y bibliografía 89

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 91

Unidad 2 · Espacios vectoriales: subespacios, base, dimensión, coordenadas y matriz de transición

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno identificará un espacio vectorial y analizará sus características fundamentales. (El Plan 2016 dice lo mismo.)

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 8 finales del Plan 2010 y en los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como el primer problema (el segundo, si el examen abre con grupos y campos). Muchos exámenes traen dos problemas de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2.1 Conceptos y expresiones

Espacio vectorial. Un conjunto V con una adición $(\vec{u}+\vec{v})$ y una multiplicación por un escalar $(\alpha\vec{u})$, con escalares de un campo K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$), es un *espacio vectorial sobre* K si cumple diez axiomas, para todos $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ y $\alpha,\beta\in K$:

1. Cerradura de la adición: $\vec{u}+\vec{v}\in V$.
2. Asociatividad: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.
3. Conmutatividad: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
4. Elemento idéntico (vector cero): existe $\vec{0}\in V$ con $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.
5. Inversos aditivos: para cada $\vec{u}$ existe $-\vec{u}\in V$ con $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.
6. Cerradura de la multiplicación por un escalar: $\alpha\vec{u}\in V$.
7. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.
8. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.
9. $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$.
10. $1\,\vec{u}=\vec{u}$.

Con operaciones «no usuales» (por ejemplo, $k(a,b)=(a^k,b^k)$), el vector cero y los inversos se calculan con la operación dada, no se suponen: el cero puede no ser $(0,0)$.

Espacios que se usan en los exámenes. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$; P_n, los polinomios de grado menor o igual a n ($P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$); $M_{m\times n}$, las matrices; y espacios de funciones reales, como el generado por $\{xe^x,e^x\}$. Un mismo conjunto puede ser espacio sobre campos distintos: $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2 (base $\{1,i\}$), y sobre $\mathbb{C}$ tiene dimensión 1.

Subespacio. $W\subseteq V$ es un *subespacio* si es espacio vectorial con las mismas operaciones de V. Basta comprobar tres cosas:

$$\vec{0}\in W,\qquad \vec{u}+\vec{v}\in W,\qquad \alpha\vec{u}\in W \quad \text{para todos } \vec{u},\vec{v}\in W,\ \alpha\in K.$$

7. **Ejercicios propuestos**, solo con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Marcas de plan. Las unidades que pertenecen a un solo plan lo dicen en el título, «(solo Plan 2010)» o «(solo Plan 2016)». Dentro de una unidad común, un párrafo que solo pide un plan lleva el rótulo SOLO PLAN 2010. Si no es tu plan, sáltalo.

Material necesario: lápiz y papel. Todas las cuentas del cuaderno se hacen a mano, con fracciones; conviene trabajar así, sin redondear.

Rutas de estudio. La Unidad 0 trae una ruta de 5 semanas y una de 2 semanas para cada plan. En las dos, la Unidad 3B (valores y vectores propios) va primero, porque es lo que más sale y lo que más se reutiliza.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

$+$	i	j	k
i	i	k	i
j	k	j	j
k	i	j	k

$*$	i	j	k
i	k	i	j
j	i	j	k
k	j	k	i

Determine: a) el inverso de cada elemento respecto a $*$; b) el resultado de $\big((-i+k)*((-j+j)*k)\big)$, donde $-i$ y $-j$ son los inversos de i y j respecto a $+$.

Resultado: a) idéntico de $*$: j; $i'=k$, $j'=j$, $k'=i$. b) i.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 91.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2026-1, problema 1.

Sean M el conjunto de las matrices de 2×2 con entradas complejas y la operación $A\#B = A+B-3I$, donde I es la matriz identidad de orden dos. Determine si $(M,\#)$ es un grupo abeliano.

Resultado: sí; idéntico $3I$; el inverso de A es $6I-A$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2024-2, problema 1.

Sea $A=\left\{\frac{x}{y}+1 \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0\right\}$ con la operación

$$\left(\frac{x_1}{y_1}+1\right)*\left(\frac{x_2}{y_2}+1\right)=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+1.$$

Considerando que se cumplen la cerradura y la asociatividad, determine si $(A,*)$ es un grupo abeliano; si no, indique los axiomas que no se cumplen.

Resultado: sí; $A=\mathbb{R}$ y $u*v=u+v-1$; idéntico 1; el inverso de u es $2-u$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 92.

1B.7 Errores frecuentes

1. **Buscar el idéntico solo en un lado.** e debe cumplir $a*e=a$ **y** $e*a=a$; en una tabla, su renglón y su columna.
2. **Un idéntico que depende de a.** Si al despejar sale $e=a$ o $e=\frac{1}{a}$, no hay idéntico: debe ser el mismo para todos.
3. **Olvidar revisar que el idéntico o el inverso pertenezcan al conjunto.** En $x*y=x+y+xy$, el inverso $-\frac{x}{1+x}$ existe solo porque $x\neq -1$.
4. **Negar con un argumento general.** Para decir «no se cumple» basta un contraejemplo concreto, como $(0,1)$, y es lo que se espera.
5. **Leer la tabla al revés.** El renglón es el primer operando: $a*b$ está en el renglón de a y la columna de b.
6. **Confundir el cero y el uno del campo con los números.** En un campo finito, «-1» es el elemento que sumado con 1 da el idéntico; en $\{0,1,2\}$ es el 2.

- **Plantilla fija:** los problemas van en el orden del programa. En el Plan 2016 casi siempre abre un problema de grupos y campos, de 10 a 16 puntos; los demás valen de 10 a 20 puntos y suman 100.
- **Una excepción:** el 1er extraordinario 2025-1 fue de 20 reactivos de opción múltiple con justificación. Los temas fueron los mismos.
- **Estilo de los enunciados:** el espacio se da con su regla, $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; las transformaciones, con su «regla de correspondencia»; se piden «valores y espacios característicos», «la matriz asociada respecto a las bases A y B», «la descomposición espectral». Las respuestas se justifican: «¿es subespacio?» se contesta condición por condición.
- **Sin calculadora:** todas las cuentas salen con fracciones pequeñas.

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Número de exámenes en que aparece cada unidad (cada problema cuenta en su tema principal):

Unidad	Tema	Plan 2010 (8 finales)	Plan 2016 (29 finales y extraord.)
1A	Introducción (historia y aplicaciones)	0	—
1B	Grupos y campos	—	**17**
2	Espacios vectoriales	**8**	**29**
3A	Transformaciones: núcleo, recorrido, matriz asociada, inversa	**8**	**27**
3B	Valores y vectores propios; diagonalización	**6**	**25**
4	Espacios con producto interno	**8**	**29**
5	Operadores: adjunto, tipos, descomposición espectral	**8**	**28**

Observaciones:

- Las unidades 2 a 5 salen en prácticamente todos los exámenes de los dos planes: el examen es una plantilla.
- Los subtemas que más se repiten son la matriz de transición y las coordenadas (6 de 8 finales del Plan 2010), los valores propios, el complemento ortogonal con la proyección, el adjunto con el tipo de operador, y la descomposición espectral (5 de 8 en el Plan 2010).
- Casi no se evalúan: la historia (1A), los efectos geométricos de las transformaciones, el criterio del wronskiano y la desigualdad de Cauchy-Schwarz por nombre. Los mínimos cuadrados salieron una sola vez (2010-2).
- **Los problemas se reciclan:** los mismos planteamientos vuelven con otros números. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

5. **Conmutatividad.** $(ac, bd) = (ca, db)$. Se cumple.
6. **Resultado:** $(C, *)$ **no es un grupo abeliano**: los pares con alguna componente cero no tienen inverso.

Ejercicio 1B.5.6 · Matrices triangulares enteras con la suma

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 1.

Dado $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ con la operación $A \ominus B = A + B$, determine si $(M, \ominus)$ es un grupo abeliano. En caso afirmativo, obtenga el inverso de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; en caso contrario, indique los axiomas que no se cumplen.

Resolución.

1. **Cerradura.** $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ 0 & c+r \end{pmatrix}$: entradas enteras y cero abajo. Se cumple.
2. **Asociatividad y conmutatividad.** Las hereda de la suma de enteros, entrada por entrada. Se cumplen.
3. **Idéntico.** La matriz cero, que está en M. Se cumple.
4. **Inversos.** $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in M$. Se cumple.
5. **Resultado:** es un grupo abeliano, y el inverso de A es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1B.5.7 · Composición de funciones

Adaptado de: 1er final 2025-1, problema 1.

Sea $(M, \circ)$, donde $\circ$ es la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $M = \{f, g, h\}$ con

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x}, \qquad h(x) = x.$$

a) Complete la tabla de la operación (se dan $f \circ g = h$, $g \circ f = h$, $g \circ g = f$ y $h \circ h = h$). b) Considerando que la composición es asociativa, determine si $(M, \circ)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. $f \circ f = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{-x} = \dfrac{x-1}{x} = g.$
2. h es la identidad: $h \circ p = p \circ h = p$ para $p = f, g, h$.
3. a) Tabla (renglón $\circ$ columna):

$\circ$	f	g	h
f	g	h	f
g	h	f	g
h	f	g	h

4. b) Cerradura: todas las entradas están en M. Idéntico: h. Inversos: $f \circ g = h$, así que $f' = g$, $g' = f$ y $h' = h$. Asociatividad: dada. Conmutatividad: la tabla es simétrica.

De Álgebra	Se usa aquí para…	Libro de Álgebra
Gauss, sistemas homogéneos, solución con parámetros	dependencia lineal, bases, núcleo, espacios característicos	Unidad 5
Matrices, transpuesta, inversa	matriz de transición, matriz asociada, $P^{-1}MP$	Unidad 6
Determinantes	polinomio característico, independencia de n vectores	Unidad 6
Raíces de polinomios, división sintética	valores propios con polinomio de grado 3	Unidad 4
Números complejos	espacios $\mathbb{C}^n$, producto interno complejo, adjunto	Unidad 3
Conjugada transpuesta; matrices simétricas, hermitianas, ortogonales, unitarias	tipos de operador (Unidad 5)	Unidad 6
Grupo y campo	definición de espacio vectorial sobre un campo	Plan 2010: Unidad 7. Plan 2016: Unidad 1B de este libro
Seno y coseno de ángulos notables	matrices de rotación, cónicas	Plan 2016: Unidad 1, Parte B. Plan 2010: Apéndice A de este libro

0.6.1 Sistemas homogéneos por Gauss

1. Escribe la matriz de coeficientes (en un sistema homogéneo, la columna de términos independientes es de ceros y no cambia).
2. Escalona: haz ceros debajo de cada pivote con operaciones de renglón $R_i - kR_j$.
3. Cada columna sin pivote es una variable libre. Despeja las demás en términos de ellas.
4. Escribe la solución general como combinación de vectores con un parámetro por variable libre.

Ejemplo. $x + 2y - z = 0,\ 2x + 4y + z = 0,\ x + 2y + 2z = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1,\ R_3-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

El segundo renglón da $z = 0$; el primero, $x = -2y$. La variable libre es $y = \alpha$: la solución es $\{\alpha(-2, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, una recta. El rango es 2 y hay $3 - 2 = 1$ parámetro.

0.6.2 Inversa de una matriz

1. De 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, si $ad - bc \neq 0$.
2. De 3×3 o más: escalona $[\ A \mid I\ ]$ hasta $[\ I \mid A^{-1}\ ]$ (Gauss-Jordan).

Como $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, el producto está en M. Se cumple.
2. **Asociatividad.** Dada por el enunciado (el producto de matrices es asociativo).
3. **Idéntico.** $R(0) = I \in M$, y $R(\theta)I = IR(\theta) = R(\theta)$. Se cumple.
4. **Inversos.** $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I$, y $R(-\theta) \in M$. Se cumple: el inverso de una rotación de θ es la rotación de $-\theta$.
5. **Resultado:** $(M, *)$ **es un grupo**. Además es abeliano, porque $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha)$.

Ejercicio 1B.5.2 · Ecuación en el grupo $x * y = x + y + xy$

Adaptado de: 1er final 2024-1, problema 1.

Sea $S = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x \neq -1\}$ con la operación binaria $x * y = x + y + xy$. Sabiendo que $(S, *)$ es un grupo abeliano, obtenga el valor de a que satisface

$$a * \tfrac{7}{4} = \tfrac{1}{5} * \tfrac{7}{4} * \tfrac{3}{2}.$$

Resolución.

1. **Idéntico:** $x * e = x + e + xe = x$ da $e(1 + x) = 0$; como $x \neq -1$, $e = 0$.
2. **Inverso:** $x + x' + xx' = 0$ da $x' = -\dfrac{x}{1 + x}$, que existe porque $x \neq -1$.
3. **Forma escondida:** $x * y + 1 = 1 + x + y + xy = (1 + x)(1 + y)$. Con ella:
$$\tfrac{1}{5} * \tfrac{7}{4} * \tfrac{3}{2} = \left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{11}{4}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right) - 1 = \tfrac{33}{4} - 1 = \tfrac{29}{4}.$$
4. La ecuación queda $(a + 1) \cdot \frac{11}{4} - 1 = \frac{29}{4}$, es decir, $(a + 1) \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{4}$ y $a + 1 = 3$.
5. Comprobación: $2 * \frac{7}{4} = 2 + \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{29}{4}$.
6. **Resultado:** $a = 2$.

Ejercicio 1B.5.3 · Completar la tabla de un grupo abeliano

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Complete la tabla considerando que (P, δ) es un grupo abeliano, donde $P = \{3, 2, 1, 0\}$ y δ es una operación binaria en P:

δ	3	2	1	0
3			1	
2	2	3		
1		0		2
0	0	1		

Resolución.

1. **Idéntico.** $2\,\delta\,3 = 2$ y $0\,\delta\,3 = 0$: operar con 3 deja igual. Además $3\,\delta\,1 = 1$. El idéntico es $e = 3$: su renglón y su columna son $3, 2, 1, 0$.
2. **Simetría.** De $2\,\delta\,2 = 3$, $1\,\delta\,2 = 0$, $0\,\delta\,2 = 1$ y $1\,\delta\,0 = 2$ salen $2\,\delta\,1 = 0$, $2\,\delta\,0 = 1$ y $0\,\delta\,1 = 2$.
3. **Renglones sin repetir.** Al renglón de 1 le falta $1\,\delta\,1$ y solo queda el 3. Al renglón de 0 le falta $0\,\delta\,0$ y solo queda el 3.

2. Empieza por los que reconozcas mejor, normalmente valores propios y grupos y campos.
3. Escribe el planteamiento antes de las cuentas: la matriz que vas a escalonar, el sistema, la fórmula de la proyección. Cada inciso se califica por separado.
4. En «¿es subespacio?», «¿es producto interno?», «¿es grupo?»: condición por condición, con «se cumple» o «no se cumple» y un contraejemplo concreto.
5. Comprueba con una línea: $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, $AA^{-1} = I$, $(\vec{u} \mid \vec{w}) = 0$.
6. Reserva 10 minutos al final para revisar signos y que cada resultado esté escrito con su espacio (un polinomio, una matriz o un vector, no solo coordenadas).

0.8 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades está en el **Apéndice A**. Conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día: copiarlo es también estudiarlo.

2. **Idéntico:** busca el renglón que repite el encabezado de columnas; comprueba que su columna también repite el de renglones.
3. **Inversos:** en cada renglón, localiza el idéntico; el encabezado de esa columna es el inverso. Si algún renglón no tiene al idéntico, no hay grupo.
4. **Asociatividad:** si el enunciado la da por cierta, dilo. Si no, hay que probarla para todas las ternas $(a*b)*c = a*(b*c)$ o reconocer la operación (por ejemplo, la suma módulo n, que es asociativa). Comprobar unas cuantas ternas no la demuestra; en cambio, una sola terna que falle basta para decir que no se cumple.
5. **Conmutatividad:** compara la tabla con su transpuesta (simetría respecto a la diagonal).
6. Conclusión: grupo abeliano si se cumplen los cinco puntos.

1B.3.3 Grupo a partir de una regla

1. Escribe los axiomas uno por uno: cerradura, asociatividad, idéntico, inversos y, si se pide grupo abeliano, conmutatividad.
2. Para cada uno, plantea la igualdad con elementos genéricos y resuélvela. Para el idéntico, despeja e de $a*e = a$ y verifica que no dependa de a y que pertenezca al conjunto. Para el inverso, despeja a' de $a*a' = e$ y verifica que pertenezca al conjunto para **todo** a.
3. Escribe «Se cumple» o «No se cumple: contraejemplo …» en cada axioma. Un solo contraejemplo basta para negar.
4. Si el enunciado pide «todos los axiomas que no se cumplen», revisa todos aunque uno ya haya fallado.

1B.3.4 Completar la tabla de un grupo abeliano

1. Encuentra el idéntico: si $a*b = b$ para algún b dado, el candidato es a. Llena su renglón y su columna con los encabezados.
2. Usa la simetría: lo que esté en la posición (a, b) va también en (b, a).
3. Completa cada renglón y cada columna con los elementos que falten: en un grupo ninguno se repite.
4. Comprueba que en cada renglón aparezca el idéntico y que la tabla final sea simétrica.

1B.3.5 Ecuaciones en un grupo abeliano

1. Calcula el lado conocido con la regla.
2. Despeja la incógnita operando por la izquierda con el inverso: si $a*b = c$, entonces $a = c*b'$.
3. Si la regla tiene una forma escondida, úsala. Por ejemplo, $x*y = x+y+xy$ cumple $x*y+1 = (x+1)(y+1)$.
4. Comprueba sustituyendo.

1B.3.6 Ecuaciones en un campo finito

1. Identifica el 0 (idéntico de $\oplus$), el 1 (idéntico de $\odot$), los inversos aditivos (en la tabla de $\oplus$, dónde aparece el 0) y los multiplicativos (en la tabla de $\odot$, dónde aparece el 1).
2. Resuelve el sistema como en los reales (sustitución o eliminación), cambiando cada resta por «sumar el inverso aditivo» y cada división por «multiplicar por el inverso multiplicativo».

espectral (Unidades 4 y 5).

Unidad 1 · Parte B · Grupos y campos (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2016). El alumno determinará si una función es una operación binaria y analizará las estructuras algebraicas de grupo, grupo abeliano y campo.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 este tema es de Álgebra; salta a la Unidad 2.
- **Frecuencia:** aparece en 17 de los 29 finales y extraordinarios del Plan 2016, casi siempre como problema 1, con un valor de 10 a 16 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1B.1 (15 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5 con cronómetro (10 min cada uno).

1B.1 Conceptos y expresiones

Operación binaria. Una *operación binaria* $*$ en un conjunto A es una regla que asigna a cada pareja ordenada (a, b) de elementos de A un único resultado $a * b$. Se dice que A es *cerrado* bajo $*$ (o que se cumple la *cerradura*) si $a * b \in A$ para todos $a, b \in A$. Si para alguna pareja el resultado no existe o cae fuera de A, la regla no es una operación binaria en A. Un conjunto con una o más operaciones se llama *sistema algebraico* y se escribe $(A, *)$.

Propiedades de una operación.

- *Asociatividad:* $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in A$.
- *Elemento idéntico:* existe $e \in A$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in A$. Si existe, es único.
- *Elementos inversos:* para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$. En un grupo, cada elemento tiene un único inverso.
- *Conmutatividad:* $a * b = b * a$ para todos $a, b \in A$.

Grupo y grupo abeliano. $(A, *)$ es un *grupo* si cumple cerradura, asociatividad, idéntico e inversos. Si además es conmutativo, es un *grupo abeliano*. Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, las matrices de $m \times n$ con la suma. No son grupo: $(\mathbb{N}, +)$ (sin inversos) ni $(\mathbb{R}, \cdot)$ (el 0 no tiene inverso).

Tabla de la operación. En un conjunto finito, la operación se da con una tabla: el renglón es el primer operando y la columna el segundo. En la tabla se lee:

- *Cerradura:* todas las entradas pertenecen al conjunto.
- *Idéntico:* un elemento e cuyo renglón y cuya columna repiten los encabezados.
- *Inversos:* en el renglón de a aparece e; la columna donde aparece es el inverso de a.
- *Conmutatividad:* la tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.
- En un grupo, cada elemento aparece exactamente una vez en cada renglón y en cada